





THÉORIE ET TABLES

D'UNE NOUVELLE

FONCTION TRANSCENDANTE.

THÉORIE ET TABLES

D'UNE NOUVELLE

FONCTION TRANSCENDANTE,

par J. SOLDNER.

A MUNIC,
Chez J. LINDAUER, Libraire.

1809.

THÉORIE

D'UNE NOUVELLE FONCTION TRANSCENDANTE.

CHAPITRE PREMIER.

SUR LES MOYENS DE PERFECTIONER ENCORE LE CALCUL INTEGRAL.

1. Toute différentielle, qui ne renferme qu'une seule variable, peut être intégrée, ou par une expression algébrique finie, ou par une série infinie. Une fonction que l'on ne peut pas exprimer autrement que par une suite infinie, est nommée fonction transcendante. Il s'ensuit donc qu'une différentielle, qui appartient à une fonction transcendante, ne peut s'intégrer que par une suite infinie. Mais les suites infinies ont l'inconvénient de n'être ordinairement convergentes que pour de certaines valeurs de la variable, et pour les autres elles ne sont d'aucun usage; ce qui fait que plusieurs problêmes sont irrésolubles. Il serait donc sans doute d'un trés-grand intérèt, si l'on pouvait éviter les suites infinies dans le calcul intégral.

2. Lorsque le calcul intégral fut inventé, les tables de logarithmes et celles des fonctions trigonométriques étaient déjà calculées à un tout autre usage. Mais on s'apperçut bientôt, que ces tables étaient d'une très-grande utilité dans le calcul intégral, et que sans elles on ne saurait intégrer que fort peu de différentielles. Comment par exemple serait-il possible, sans le secours des tables de logarithmes, de déterminer l'intégral $\int \frac{dx}{1+x}$, prise depuis x nul jusqu'à x égal à un nombre considérablement grand? Ce problême, à présent si facile, serait un des plus difficiles que l'analyse nous présente; et il en serait de même de toutes les intégrales qui dépendent des logarithmes et des arcs de cercle.

En considérant bien cette matière, on voit que la grande facilité, que les tables logarithmiques et trigonométriques donnent au calcul intégral, vient de ce que ces tables renferment, toutes calculées, les séries par lesquelles il faudrait exprimer les intégrales qui s'y rapportent. Or au lieu de développer, par exemple, l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x}$ dans une suite infinie, on n'a qu'à faire $\int \frac{dx}{1+x} = \mathrm{l.}\,(1+x)$; étant sûr qu'on trouvera la valeur de cette fonction dans les tables de logarithmes, quel que soit x.

C'est le hazard qui nous a donné cet expédient, il faut suivre la route qu'il nous a indiquée, il faut réduire encore plusieurs fonctions transcendantes en tables, pour multiplier les moyens d'intégrer. En effet, après les travaux de tant des grands Géomètres, on ne peut guère espérer, qu'avec les moyens que nous possedons, le calcul intégral soit encore porté à une perfection beaucoup plus grande.

3. Différens obstacles s'opposent à l'exécution de nos idées. Ces tables seront beaucoup plus difficiles à calculer que celles des fonctions logarithmiques et trigonométriques; parceque celles-ci ont de certaines relations qui facilitent beaucoup la construction des tables, et qu'on ne retrouve pas dans les autres fonctions transcendantes. Par exemple, quand on a calculé les logarithmes de deux nombres, on a aussitôt celui du produit de ces nombres: avantage dont les autres fonctions sont privées. D'ailleurs il est évident que, si l'on voulait parvenir à éviter entièrement les séries infinies dans le calcul intégral, il faudrait une infinité de tables; le nombre des fonctions transcendantes étant infiniment grand. Comme cela ne se peut pas, il faut se contenter de ne mettre en tables que celles des fonctions transcendantes que la pratique nous offre le plus souvent.

4. Quand on a la table d'une certaine fonction, la même table servira à éviter les séries infinies dans toutes les intégrales qu'on peut y ramener. Par exemple, pour éviter les séries infinies dans l'intégrale $\int \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{(1-x)^2}}$, il n'est pas nécessaire de construire une table pour chaque valeur de n; parcequ'on peut ramener cette intégrale à n intégrales algébriques et à une de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, qui est transcendante; ce n'est donc que pour la dernière qu'il faut une table.

La réduction des intégrales composées aux intégrales simples étant une des parties les plus importantes du calcul intégral, il ne sera pas inutile d'en donner ici un théorême général.

Si l'on a l'intégrale $\int dx.\ Fx.\ fx$, où Fx et fx sont des fonctions quelconques de x, et si l'on fait $\int dx\ Fx = u$, on a, comme on sait:

$$\int dx.\ Fx.\ fx = u.\ fx - \int u\ d.\ fx.$$

Soit maintenant s une fonction arbitraire de x et des constantes, on aura de même; parceque $Fx = \frac{Fx}{s}.\ s$,

$$\int dx.\ Fx. = su - \int u\ ds;$$

où $u = \int \frac{dx}{s}.\ Fx$. Soit $ds = z dx$, et s' une nouvelle fonction arbitraire de x et des constantes, on aura, par le même procédé,

$$\int dx\ Fx. = su - s'u'z + \int u'd\ (s'z);$$

où $u' = \int \frac{dx.\ u}{s'}$. En faisant de nouveau $d.\ (s'z) = z'\ dx$, et continuant de cette manière, on aura généralement:

$$\int dx.\ Fx = su - s'u'z + s''u''z' - \ldots \pm s^n u^n z^{n-1} \mp \int u^n d.\ (s^n z^{n-1});$$

où $z = \frac{ds}{dx}$, $z' = \frac{d\ (s'z)}{dx}$, $z'' = \frac{d\ (s''z')}{dx}$ etc.,

et $u = \int \frac{dx}{s} Fx$, $u' = \int \frac{u\,dx}{s'}$, $u'' = \int \frac{u'dx}{s''}$ etc.;

s, s', s'' etc. étant des fonctions arbitraires de x et des constantes.

Selon qu'on fait les arbitraires s, s', s'' etc. on pourra trouver, au moyen de ce théorême, une infinité d'expressions, plus ou moins compliquées et plus ou moins praticables, pour chaque intégrale. Ce théorême est d'ailleurs la série d'intégration la plus générale: celle de Bernoulli et les deux de Taylor (*Methodus incrementorum*, pag. 38) n'en sont que des cas particuliers.

5. Maintenant nous allons exposer la méthode par laquelle des tables, telles que nous venons de les proposer, se peuvent calculer. On sait, qu'une différentielle appartenante à une fonction transcendante, ne peut être intégrée autrement que par une série infinie. Mais par le théorême du numéro précédent, ou par

quelque autre méthode, il sera presque toujours possible d'optenir pour la même intégrale deux sériès, dont l'une est ordonnée par rapport aux puissances ascendantes de la variable, ou d'une fonction de la variable, et l'autre par rapport aux puissances descendantes de la même grandeur. Ces deux séries auront, par conséquent, l'avantage que l'une est convergente pour la même valeur de la variable qui rend l'autre divergente. Entre ces séries il y aura souvent une constante relative, c'est-à-dire, il faudra ajouter une constante à l'une pour qu'elle coïncide avec l'autre, à valeurs égales de la variable: et cette contante sera à déterminer par des méthodes particulières. Il peut arriver qu'il reste encore une partie de la table à dresser, pour laquelle on ne sait pas trouver une série praticable. En ce cas il n'y a pas d'autre moyen que de calculer la table sur les séries convergentes aussi loin que possible; et, en partant de ce point, de la continuer moyennant le théorême de Taylor.

Pour expliquer ce que je viens de dire, prennons pour exemple une fonction connue. Supposons pour cet effet que l'on n'ait pas des tables trigonométriques, et qu'on veuille réduire en tables l'intégrale $\int \frac{dx}{1+x^2}$, que nous appellerons Arc. tang. x. En divisant dans la différentielle par $1+x^2$ et intégrant, on aura

$$\text{Arc. tang. } x = C + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \text{etc.};$$

C étant une constante arbitraire. Mais cette série n'est convergente que quand x est égal ou plus petit que l'unité. Pour en avoir une autre, suivant les puissances descendantes de x, faisons

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}.$$

La dernière expression nous donnera, après avoir divisé par $1+\frac{1}{x^2}$ et intégré,

$$\text{Arc. tang. } x = C' - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \text{etc.};$$

où C' est la constante à ajouter: et cette série sera convergente dans le cas où la première est divergente. Maintenant, pour déterminer la constante relative entre ces deux séries, on observera qu'elles sont également convergentes pour $x = 1$. En faisant donc $x = 1$ et ôtant la seconde de la première, on aura l'équation

$$0 = C - C' + 2\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \text{etc}\right)$$

Si l'on ne savait pas la somme de cette série, il faudrait la calculer; mais comme on sait que $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.} = \frac{1}{4}\pi$, π étant la demi-circonférence du

cercle dont le rayon est l'unité, on a $C' = C + \frac{1}{2}\pi$. $\frac{1}{2}\pi$ sera donc la constante relative cherchée et la constant C reste arbitraire. Moyennant les deux séries que nous venons de trouver, il serait facile de construire une table pour la fonction Arc. tang. x, depuis x nul jusqu'à x infini, et il n'y aurait que la partie où x s'approche de l'unité qui serait un peu embarrassante; puisqu'en ce cas les séries sont fort peu convergentes. Souvent on peut rendre praticables les séries peu convergentes, et même divergentes, en les transformant convenablement. Si l'on fait, dans notre exemple, $\frac{x^2}{1 \cdot 3} = \iota'$, $\frac{2^2 x^2}{3 \cdot 5} = \iota''$, $\frac{3^2 x^2}{5 \cdot 7} = \iota'''$ etc., on a (*Voyez* Mém. de Pétersb. de l'an. 1782.)

$$\text{Arc. tang. } x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{\iota'}{1 + \cfrac{\iota''}{1 + \text{etc.}}}};$$

et cette fraction continue est encore très convergente lorsque x est égal à l'unité ou un peu plus grand que l'unité. Sans cet expédient il aurait fallu s'approcher, autant que possible, de la valeur de $x = 1$ moyennant les séries, par exemple jusqu'à $x = \frac{3}{4}$, et, en partant de ce point, se servir du théorême de Taylor pour le reste.

C'est en général la méthode par laquelle les fonctions transcendantes peuvent être réduites en tables. Dans les cas particuliers on trouvera toujours encore d'autres avantages, qui dépendent de la nature de la fonction.

6. L'intégrale $\int \frac{dx}{\text{l. } x}$, l. x étant le logarithme hyperbolique de x, est une de celles qui exigent préférablement des tables. Car non seulement on rencontre très souvent cette intégrale dans l'analyse spéculative, mais il y a aussi des problêmes de physique qui en dépendent. Et ce qui m'a déterminé principalement à essayer ma méthode sur cette fonction, c'est que jusqu'ici on n'a pu parvenir à se former une idée claire de sa nature. On la croiait au-dessus des forces de notre analyse et Mr. de la Place est le seul qui a résolu, dans le n°. 13 du dixième livre de la Mécanique céleste, un problême qui s'y rapporte.

Euler, en traitant de cette fonction dans ces Institutions du calcul intégral (Tom. I, art. 219 et 228), a trouvé la serie

$$\int \frac{dx}{l.x} = \text{const.} + l\,l\,x + l x + \frac{(l x)^2}{1.2.2} + \frac{(l x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.}$$

Mais il observe que de cette série on ne peut rien conclure sur la nature de la fonction; parceque la constante ne devient pas réelle par les suppositions que l'intégrale doit s'évanouir lorsque $x = 0$, ou lorsque $x = 1$. Malgré cette incertitude qu'il avoue, Euler avance qu'il est évident, qu'en supposant cette fonction réelle x étant plus petit que l'unité, elle serait nécessairement imaginiaire x étant plus grand que l'unité; et vice-versâ. Mais il me semble que cette conclusion n'est pas juste. La série qu'Euler a trouvée dévient imaginaire, il est vrai, en y faisant x plus petit que l'unité; mais cela me paraît seulement prouver qu'elle ne s'applique pas à ce cas, et qu'il faut en chercher encore d'autres. En général, on ne peut jamais décider de la nature d'une fonction par une seule série infinie. Je m'explique: si, par exemple, on voulait juger de la nature de la fonction Arc. tang. x par la seule série $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 -$ etc. on trouverait que la série est divergente lorsque x est plus grand que l'unité. Puis, il est évident qu'une série divergente n'est pas moins une expression imaginaire qu'une autre affectée de $\sqrt{-1}$; on parviendrait donc à la fausse conclusion que la fonction Arc. tang. x est imaginaire lorsque x est plus grand que l'unité.

Voilà, il me semble, tout ce que l'on connaît jusqu'à présent de la fonction en question, et je ne trouve pas que, quant à la fonction en général, on y ait ajouté quelque chose depuis Euler. J'essayerai, dans le chapitre suivant, une théorie complète de cette fonction, d'après les principes que j'ai établis dans ce premier chapitre.

CHAPITRE II.

Théorie des logarithmes intégraux.

7. J'appelle *Logarithme intégral* la fonction $\int \frac{dx}{l.\,x}$, $l.\,x$ étant le logarithme hyperbolique de x; et je désigne cette fonction de la manière suivante

$$\int \frac{dx}{l.\,x} = li.\,x \quad :$$

de sorte que, $li.\,x$ représente notre intégrale, comme par exemple $l.\,x$ représente l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$.

Puisqu'il est difficile de reconnaître la nature de cette fonction, j'ai d'abord recouru à des moyens mécaniques, pour m'en former une idée claire. Actuellement je pourrais bien me passer de ce moyen, espérant que l'analyse que je vais donner aura toute l'évidence que l'on peut désirer; mais comme ce procédé peut servir encore dans d'autres circonstances douteuses, j'en donnerai ici un précis.

Si l'on considère x comme l'abscisse d'une ligne courbe et $\frac{1}{l.\,x}$ comme l'ordonnée qui répond à l'abscisse x, on sait, par la méthode des quadratures, que $\int \frac{dx}{l.\,x}$ représente l'espace entre les coordonnées et la ligne courbe. Soit AB (Voyez la figure à la fin de cet ouvrage) la ligne des abscisses. Je divise cette ligne en parties égales en 0, 1, 2, 3 etc., et j'imagine que x commence au point 0. J'élève sur la ligne AB les perpendiculaires $1\,C$, $2\,M'$, $3\,M''$ etc., et je fais $1\,C = \frac{1}{l.\,1}$ $2\,M' = \frac{1}{l.\,2}$, $3\,M'' = \frac{1}{l.\,3}$ etc. Mais comme les logarithmes des nombres plus petits que l'unité sont négatifs, les ordonnées depuis 0 jusqu'à 1 sont aussi négatives. Si l'on regarde donc les ordonnées au-dessus de AB comme positives, il faut nécessairement que les ordonnées entre 0 et 1 soient rapportées au-desous de AB.

En conduisant enfin les points M', M'', M''' etc. et o, N', N'' etc., que j'avais ainsi déterminés, il en est résulté la ligne courbe que l'on voit dans la figure.

On voit par cette figure, que la ligne courbe a deux branches infinies; une positive $M^{-\infty}$ M' M'' ... M^{∞} et une négative o N' ... N^{∞}. La branche négative part du point o de la ligne des abscisses, puisque $\frac{1}{l.\ o} = -$ o; tourne vers la droite CD, qui coupe perpendiculairement la ligne AB en 1; et la joint au point N^{∞}, que je suppose infiniment éloigné de o: ensorte que la droite CD est l'asymptote de cette branche. La branche positive commence aussi par avoir la CD pour asymptote, et, après avoir passé par M', M'', M''' etc., elle s'approche asymptotiquement de AB.

Maintenant comme li. x est représenté par les epaces entre les coordonnées et la ligne courbe, de sorte que l'on a, par exemple, li. $\frac{1}{2}$ = o N' $\frac{1}{2}$, il résulte de notre figure que les logarithme intégraux des nombres négatifs sont impossibles; que li. o = o; et que depuis o jusqu'à 1 tous les logarithmes intégraux sont négatifs. Les espaces asymptotiques sont dans de certains cas finis dans d'autres ils sont infinis; mais il est probable que l'espace o $N^{\infty} D$ 1 est infini, parceque la série rapportée dans le numéro précédent devient $-\infty$ lorsque $x = 1$; on aura donc li. $1 = -\infty$. Comme la formule citée redevient finie en y faisant $x = 2$, il faut que l'espace infini négatif o $N^{\infty} D$ 1 soit détruit par un autre espace infini positif; il s'ensuit donc que l'espace asymptotique 1 $C M^{-\infty} M'$ 2 est aussi infini.

Il serait inutile de pousser plus loin cette espèce de considération; je vais donner l'analyse.

8. Nous avons supposé que:

$$\text{li.}\ x = \int \frac{d\,x}{l.\ x}.$$

Pour réduire cette intégrale en série, faisons l. $x = z$ et nous aurons

$$\text{li.}\ x = \int \frac{e^z dz}{z};$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. On sait que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En substituant cette valeur de e^z et intégrant, on aura

$$\int \frac{e^z\, dz}{z} = \text{l}.\, z + z + \frac{z^2}{1.2.2} + \frac{z^3}{1.2.3.3} + \text{etc.},$$

et mettant l. x au lieu de z,

$$\text{li}.\, x = C + \text{ll}.\, x + \text{l}.\, x + \frac{(\text{l}.x)^2}{1.2.2} + \frac{(\text{l}.x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.}; \quad (1)$$

où C est une constante. Lorsque x est plus petit que l'unité, l.x est négatif et, par conséquent, ll.x est imaginaire. La série, que nous venons de trouver, n'est donc réelle que quand x est égal à l'unité ou plus grand que l'unité. Pour avoir une autre série, qui puisse nous servir à exprimer les logarithmes intégraux des nombres plus petits que l'unité, substituons $\frac{1}{x}$ pour x; ce qui nous donnera

$$\text{li}.\, \frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x^2\, \text{l}.\, x}.$$

et, en faisant l. $x = z$,

$$\text{li}.\, \frac{1}{x} = \int \frac{e^{-z}\, dz}{z};$$

d'où l'on tire

$$\text{li}.\, \frac{1}{x} = C' + \text{ll}.\, x - \text{l}.\, x + \frac{(\text{l}.x)^2}{1.2.2} - \frac{(\text{l}.\, x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.} \quad (2)$$

C' étant la constante à ajouter. Cette série devient imaginaire quand x est plus petit que l'unité, mais elle est réelle depuis $\frac{1}{x} = 0$ j'usqu'à $\frac{1}{x} = 1$.

Les deux séries, que nous venons de trouver, ne peuvent coïncider que quand $x = 1$; parceque dans d'autres cas l'une ou l'autre devient imaginaire; ce sera donc à cette valeur de x que nous déterminerons leur constante relative. Supposons, pour cet effet, x infiniment approché de l'unité. Alors l. x sera infiniment petit, et la condition que les deux séries doivent coïncider, nous donnera, en ôtant la seconde de la première, l'équation

$$0 = C - C' + \text{ll}.\, x - \text{ll}.\, x;$$

d'où l'on conclut, en faisant $x = 1$, $C' = C$. Il n'y a donc point de constante relative entre nos deux séries.

Par la méthode suivante on trouvera encore deux autres séries, qui sont, en certains cas, plus commodes que les précédentes. Si l'on fait

$$\frac{1}{\text{l.}\,(1+x)} = \frac{1}{x} + A^{(1)} - A^{(2)}\,x + A^{(3)}\,x^2 - \text{etc.},$$

la loi des coefficiens $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, $A^{(3)}$ etc. sera

$$A^{(1)} = \tfrac{1}{2}$$
$$A^{(2)} = \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}A^{(1)}$$
$$A^{(3)} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{3}A^{(1)} - \tfrac{1}{2}A^{(2)}$$
$$A^{(4)} = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{4}A^{(1)} - \tfrac{1}{3}A^{(2)} - \tfrac{1}{2}A^{(3)}$$

etc.

Cela posé; en multipliant par dx et intégrant, on aura

$$\text{li.}\,(1+x) = C'' + \text{l.}\,x + A^{(1)}\,x - \tfrac{1}{2}A^{(2)}\,x^2 + \tfrac{1}{3}A^{(3)}\,x^3 - \text{etc.} \quad (3)$$

Et si l'on fait, dans l'équation supposée, x négatif, on trouvera, après avoir multiplié par $-dx$ et intégré,

$$\text{li.}\,(1-x) = C''' + \text{l.}\,x - A^{(1)}\,x - \tfrac{1}{2}A^{(2)}\,x^2 - \tfrac{1}{3}A^{(3)}\,x^3 - \text{etc.}; \quad (4)$$

C'' et C''' étant les constantes à ajouter.

Ces deux nouvelles séries ont aussi la propriété qu'elles ne sont réelles que lorsque $1+x$ est plus grand que l'unité dans la première, et $1-x$ plus petit que l'unité dans la seconde; mais comme elles sont également réelles x étant nul, nous pouvons déterminer leur constante relative. Pour déterminer cette constante relative, supposons d'abord x infiniment petit; la condition, que la différence de deux séries doit être nulle, nous donne

$$0 = C'' - C''' + \text{l.}\,x - \text{l.}\,x,$$

d'où il s'ensuit, en faisant évanouir x, $C''' = C''$; c'est-à-dire, la constante relative est nulle.

Maintenant pour déterminer la constante relative entre les séries (1) (2) et (3) (4), substituons $1+x$ pour x dans (1), et nous aurons

$$\text{li.}\,(1+x) = C + \text{ll.}\,(1+x) + \text{l.}\,(1+x) + \frac{[\text{l.}\,(1+x)]^2}{1.2.2} + \text{etc.}$$

Mais en supposant x si petit qu'on puisse négliger x^2 vis-à-vis de x, on aura $\text{l.}\,(1+x) = x$, $\text{ll.}\,(1+x) = \text{l.}\,x$ et, par conséquent

$$\text{li.}\,(1+x) = C + \text{l.}\,x + x.$$

Dans la même supposition, de x très-petit, la série (3) devient

$$\text{li.}\,(1+x) = C'' + \text{l.}\,x + A^{(1)}\,x.$$

En égalant la différence de ces deux expressions à zéro, et faisant x nul, on aura $C' = C$. Nous avons donc la propriété remarquable, que

$$C = C' = C'' = C''':$$

ou qu'il faut ajouter la même constante aux séries (1) (2) (3) (4), et qu'il n'y a point de constantes relatives entre ces séries.

9. Pour déterminer la constante commune à nos quatre séries, reprenons l'équation (2) du numéro précédent. Elle devient, en y substituant e^x pour x, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité,

$$\text{li. } e^{-x} = C + \text{l.}\, x - x + \frac{x^2}{1.2.2} - \frac{x^3}{1.2.3.3} + \text{etc.}$$

Nous avons vu, dans le n$^{o.}$ 7, que li. $o = o$. En construisant une table pour une intégrale, la constante reste toujours arbitraire, et on pourrait, par conséquent, égaler li. o à un nombre quelconque; mais comme le plus naturel est de faire li. $o = o$, ce sera dans cette supposition que nous déterminerons la constante C. Cela posé, on aura

$$C = -\text{l.}\, x + x - \frac{x^2}{1.2.2} + \frac{x^3}{1.2.3.3} - \text{etc.};$$

x étant infiniment grand. On sait que

$$\frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 + \frac{x}{1.2} - \frac{x^2}{1.2.3} + \text{etc.}$$

En multipliant ceci par dx et intégrant, on aura la somme de la série infinie

$$x - \frac{x^2}{1.2.2} + \frac{x^3}{1.2.3.3} - \text{etc.} = -\int \frac{e^{-x} - 1}{x} \cdot dx;$$

où l'intégrale commence à x nul. Si l'on substitue cette valeur de la série dans l'expression de C, elle deviendra

$$C = -\text{l.}\, x - \int \frac{e^{-x} - 1}{x} \cdot dx;$$

l'intégrale étant prise depuis x nul jusqu'à x infini.

Quand n est un nombre infiniment grand, on a, comme on peut s'en assurer facilement par le développement du binome.

$$e^{-x} = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n,$$

et partant, si l'on fait $1 - \frac{x}{n} = z$,

$$C + \mathrm{l}.\, x = - \int \frac{1 - z^n}{1 - z} \cdot dz;$$

l'intégrale étant prise depuis $z = 1$ jusqu'à $z = 0$. z doit être nul dans le dernier cas; parceque, quand x est infiniment grand, il faut absolument que $x = n$; $(1 - \frac{x}{n})^n$ devant être nul. On sait que chaque intégrale, depuis a jusqu'à b est égale à la même intégrale, depuis b jusqu'à a, prise négativement; on a donc aussi

$$C + \mathrm{l}.\, x = \int \frac{1 - z^n}{1 - z} \cdot dz;$$

l'intégrale prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. Présentement, si l'on divise par $1 - z$ et prend l'intégrale dans les dites limites, on aura

$$\int \frac{1 - z^n}{1 - z} \cdot dz = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \;\cdots\; + \frac{1}{n}.$$

Dans $\mathrm{l}.\, x$ x doit être infiniment grand, et comme nous avons vu que, dans ce cas, $x = n$, nous avons

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \;\cdots\; + \frac{1}{n} - \mathrm{l}.\, n.$$

Notre constante est donc réduite à la sommation de la série harmonique naturelle.

Si m est un nombre quelconque, on a, (Voyez le Traité du calcul différentiel par Euler, part. II, art. 142.)

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} = H + \mathrm{l}.m. + \frac{1}{2m} - \frac{\phi^{(1)}}{2m^2} + \frac{\phi^{(3)}}{4m^4} - \frac{\phi^{(5)}}{6m^6} + \quad \text{etc.};$$

où H est une constante, et $\phi^{(1)} = \frac{1}{6}$, $\phi^{(3)} = \frac{1}{30}$, $\phi^{(5)} = \frac{1}{42}$ etc.;
c'est-à-dire les nombres de Bernoulli, et dont on trouve le $i^{ème}$, les précédens étant donnés, par l'expression suivante:

$$\phi^{(i)} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{i}{i+2} - \frac{i+1}{1.2} \cdot \phi^{(1)} + \frac{(i+1)\,i\,(i-1)}{1.2.3.4} \cdot \phi^{(3)} - \frac{(i+1)\,i\,(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4.5.6} \cdot \phi^{(5)} + \cdots \pm \frac{(i+1)\,i\,(i-1)\ldots 4}{1.2.3\ldots(i-1)} \cdot \phi^{(i-2)}.$$

Il faut employer le signe $+$ quand $\frac{i+1}{2}$ est un nombre impair, et $-$ quand $\frac{i+1}{2}$ est un nombre pair. Cela posé:

Si l'on fait $m = n$, ou infiniment grand, on a visiblement

$$H = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \mathrm{l}.\, n;$$

d'où il s'ensuit

$$C = H.$$

Il ne nous reste donc qu'à déterminer H en nombres. La manière la plus naturelle de déterminer H est de faire $m = 1$ dans l'expression générale de $1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$; mais comme la série, qui en résulte, serait trop peu convergente, il faut faire m plus grand que l'unité. En faisant $m = 10$, par exemple, et réduisant les dix termes $1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{10}$ en une seule fraction, on aura

$$H = \frac{7381}{2520} - \mathrm{l}.\, 10 - \frac{1}{20} + \frac{\phi^{(1)}}{200} - \frac{\phi^{(3)}}{40000} + \frac{\phi^{(5)}}{6000000} - \text{etc.};$$

série qui est très convergente. Moyennant cette expression Euler a calculé la valeur de H avec seize décimales; et comme il m'a fallu vérifier le calcul d'Euler, je l'ai calculé à vingt-deux décimales, et j'ai trouvé

$$H = 0{,}5772156649015328606065.$$

C'est donc la constante qu'il faut ajouter à nos quatre séries du nº. 8. Le nombre H parut déjà si remarquable à Euler, qu'il en fit l'object d'un mémoire, imprimé dans le volume de ceux de l'Académie de Pétersbourg pour l'année 1781; sous le titre: *De numero memorabili, in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente.* A cette occasion Euler a découvert plusieurs propriétés curieuses de ce nombre; mais celle, que nous venons de trouver, est sans doute, et la plus curieuse, et la plus utile.

10. La série (2) du nº. 8 finit par être convergente, quel que soit x; mais dans le cas où x est considérablement grand, il faudrait calculer un très grand nombre de termes, pour parvenir à des résultats assez approchés: et il en serait de même de la série (4). Tachons donc de réduire $\mathrm{li}.\, \frac{1}{x}$ en série ordonnée par rapport aux puissances descendantes de $\mathrm{l}.\, x$.

Nous avions, dans le nº. 8.

$$\mathrm{li}.\, \frac{1}{x} = \int \frac{dx}{x^2\, \mathrm{l}.x}.$$

Si l'on développe cette intégrale au moyen du théorême que nous avons donné dans le n°. 4, on aura, en y faisant $s = \frac{1}{l.x}$, $s' = s'' = s'''$ etc. $= x$,

$$\text{li.}\ \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\,l.\,x}\left\{1 - \frac{1}{l.\,x} + \frac{1.2}{(l.\,x)^2} - \frac{1.2.3}{(l.x)^3} + \text{etc.}\right\}. \quad (5)$$

Cette série devenant nulle x étant infiniment grand, il n'y a point de constante à ajouter. Le terme général, ou $n^{ième}$, de la série est $\frac{1.2.3\ldots n}{(l.\,x)^n}$; et comme il est visible que ce terme devient infiniment grand, quand n est infiniment grand, la série est une expression imaginaire qu'il faut transformer pour la rendre réelle et praticable. Le seul moyen, que je connais, d'y parvenir est de réduire la série en fraction continue.

Considérons, pour cet effet, la série plus générale

$$1 - mq + m\,(m+n)\,q^2 - m\,(m+n)\,(m+2n)\,q^3 + \text{etc.}$$

Si on la suppose égale à la fraction continue

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{a^{(1)}q}{1 + \cfrac{a^{(2)}q}{1 + \cfrac{a^{(3)}q}{1 + \text{etc.}}}}}$$

on n'aura qu'à déterminer les $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc. Cette forme de la fraction continue doit être admisible; parceque la fraction devient 1, q étant nul; et qu'elle fournit d'ailleurs toutes les puissances de q.

La manière la plus naturelle de déterminer les $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc. par m et n sera, de développer la fraction continue dans une série suivant les puissances ascendantes de q, et de comparer les coefficiens des puissances égales de q dans les deux séries. Mais pour développer la fraction continue dans une série, il faut d'abord la réduire en fractions ordinaires.

Les deux premières de ces fractions ordinaires sont, selon qu'on s'arrête à $a^{(1)}$ ou à $a^{(2)}$, $\frac{1}{1 + a^{(1)}q}$ et $\frac{1 + a^{2} q}{1 + a^{(1)}q + a^{(2)}q}$; et, en partant de ces deux, on en peut trouver autant qu'on voudra par le procédé suivant. Soit $N^{(i)}$ le numérateur de la $i^{ème}$ fraction et $D^{(i)}$ son dénominateur, on aura

$$N^{(i)} = N^{(i-1)} + a^{(i)}q.\ N^{(i-2)}$$

et

$$D^{(i)} = D^{(i-1)} + a^{(i)}q.\ D^{(i-2)}$$

Il est aisé de voir que, si l'on réduit en série, suivant les puissances de q, la $i^{ème}$ des fractions ordinaires que l'on a tirées de la fraction continue, on aura tous les coéfficiens de q complets jusqu'au $i^{ème}$ inclusivement. On pourra donc, par ce $i^{ème}$ coéfficient, déterminer $a^{(i)}$; $a^{(i-1)}$, $a^{(i-2)}$ etc. étant donnés. Cela posé; en dénotant par $R^{(i)}$ la $i^{ème}$ des fractions ordinaires, on aura

$$R^{(i)} = 1 + q \cdot \frac{dR^{(i)}}{dq} + \frac{q^2}{1.2} \cdot \frac{d^2 R^{(i)}}{dq^2} + \frac{q^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 R^{(i)}}{dq^3} + \text{etc.};$$

où il faut faire q nul dans $\frac{dR^{(i)}}{dq}$, $\frac{d^2 R^{(i)}}{dq^2}$ etc. après les différentiations. (Voyez Théorie des fonctions analytiques, par Mr. de la Grange, no. 45). Dans cette série le coéfficient de q^i est $\frac{d^i R^{(i)}}{1.2.3\ldots i.dq^i}$, et celui-ci comparé au coéfficient de q^i dans la série à transformer, nous donnera l'équation

$$\pm m (m+n) (m+2n) \cdots (m + [i-1] n) = \frac{d^i R^{(i)}}{1.2.3\ldots i.dq^i}.$$

Le signe + a lieu lorsque i est un nombre pair, et — lorsque i est un nombre impair. Au moyen de cette équation on peut déterminer $a^{(i)}$; ensorte que l'on tire $a^{(1)}$ de $-m = \frac{dR^{(1)}}{dq}$, $a^{(2)}$ de $m(m+n) = \frac{d^2 R^{(2)}}{1.2.dq^2}$ etc.; ce qui donnera

$$\begin{aligned} a^{(1)} &= m & a^{(2)} &= n \\ a^{(3)} &= m+n & a^{(4)} &= 2n \\ a^{(5)} &= m+2n & a^{(6)} &= 3n \end{aligned}$$

etc.

En substituant ces valeurs de $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ etc. dans la fraction continue, nous aurons enfin

$$1 - mq + m(m+n)q^2 - m(m+n)(m+2n)q^3 + \text{etc.} = \cfrac{1}{1+\cfrac{mq}{1+\cfrac{nq}{1+\cfrac{(m+n)q}{1+\cfrac{2nq}{1+\cfrac{(m+2n)q}{1+\cfrac{3nq}{1+\text{etc.}}}}}}}}$$

Euler a résolu le premier ce problême utile, mais par une toute autre méthode que celle que nous avons employée. (Voyez Mém. de Pétersb. de l'an. 1784). Mr. de la Place a donné aussi, dans le dixième livre de la Mécanique céleste, une très belle méthode pour réduire les séries en fractions continues. Il aurait été facile d'appliquer cette méthode à notre série (5); mais comme l'ouvrage de Mr. de la Place est entre les mains de tous les Géomètres, je n'ai pas cru rendre service à mes lecteurs en la rapportant ici.

Quoique Euler ait montré comment tirer parti des séries divergentes, on n'a fait, que je sache, aucun usage de sa méthode dans le calcul intégral, où l'on rencontre très souvent cette espèce de séries; et Mr. de la Place a employé le premier ce procédé. Cette remarque de Mr. de la Place est une de celles qui paraîssent si naturelles dès qu'elles sont faites; mais, peut-être que sans elle, je n'aurais pas su déterminer l'intégrale $\int \frac{dx}{\text{l.}x}$.

11. Quand x est considérablement grand, la série (1) du no. 8 devient très peu convergente; il serait donc à souhaiter qu'on eut aussi pour ce cas une série suivant les puissances descendantes de x. Si l'on substitue x au lieu de $\frac{1}{x}$ dans (5), on a

$$\text{li.}\, x = \frac{x}{\text{l.}x}\left\{1 + \frac{1}{\text{l.}x} + \frac{1.2}{(\text{l.}x)^2} + \frac{1.2.3}{(\text{l.}x)^3} + \text{etc.}\right\} + \text{constante.}$$

Mais la constante devient infiniment grande, et par conséquent la série n'est d'aucun usage. Il me paraît d'ailleurs peu probable qu'une telle série soit possible. Car une série, suivant les puissances descendantes de x, doit être nulle, par sa nature, lorsque x est infiniment grand; et comme il est visible que li. $\infty = \infty$, il faudrait toujours ajouter à cette série une constant infiniment grande.

Dans le cas donc, où x est très grand, je ne connaîs d'autre moyen, de continuer la table, que le théorême de Taylor. Par ce théorême on a, li. a étant donné,

$$\text{li.}\,(a+x) = \text{li.}\,a + \frac{x}{\text{l.}\,a} + \frac{x^2\, d.\,\frac{1}{\text{l.}\,a}}{1.2.da} + \frac{x^3\, d.^2\,\frac{1}{\text{l.}\,a}}{1.2.3.da^2} + \text{etc.}$$

Mais les différences $\frac{d.\,\frac{1}{\text{l}\,a}}{d\,a}$, $\frac{d.^2\,\frac{1}{\text{l}\,a}}{d\,a^2}$ etc. deviendraient tellement compliquées que, non seulement on ne saurait appercevoir la loi qu'elles suivent, mais que le calcul sur cette série en serait extrêmement pénible. Voici un autre théorême, plus général que celui de Taylor, et qui n'aura pas cet inconvénient.

12. Soit $F\,(a+x)$ une fonction quelconque de $a+x$, que nous nous proposons de développer dans une série, ordonné par rapport aux puissances d'une fonction arbitraire de x.

Supposons, pour cet effet,

$$F\,(a+x) = A + s\,B + s^2\,C + s^3\,D + \text{etc.};$$

où A, B, C etc. sont des constantes qui ne dépendent que de a, et s une fonction arbitraire de x; avec cette condition seulement, que s disparaisse lorsque x est nul. Pour exprimer mieux cette propriété de s faisons $s = f(a+x) - fa$, où f signifie une fonction arbitraire. Cette valeur de s nous donnera, en ne faisant varier que x,

$$ds = \left\{\frac{d.\,f(a+x)}{d\,x}\right\}\,d\,x.$$

On a encore, comme on sait,

$$\left\{\frac{d.\,f(a+x)}{d\,x}\right\} = \left\{\frac{d.\,f(a+x)}{d\,a}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\frac{d.\,F(a+x)}{d\,x}\right\} = \left\{\frac{d.\,F(a+x)}{d\,a}\right\}$$

Çela posé; la condition, que $s = o$ lorsque $x = o$, nous donne d'abord $A = Fa$. Maintenant si l'on prend les différences de l'équation supposée, par rapport à x, on a, après avoir substitué la valeur de ds,

$$\frac{d.\, F(a+x)}{d.\, f(a+x)} = B + 2sC + 3s^2 D + \text{etc.};$$

d'où l'on tire, en faisant x nul,

$$B = \frac{d\,Fa}{d\,fa}.$$

En différenciant encore, relativement à x, on aura

$$\frac{d.\,\frac{d.\,F(a+x)}{d.\,f(a+x)}}{d.\,f(a+x)} = 2C + 2.\,3\,s\,D + 3.\,4\,s^2\,E + \text{etc.};$$

ce qui donne, en faisant x nul,

$$C = \frac{d\cdot\frac{d\,Fa}{d\,fa}}{1.2.\,d\,fa}.$$

En suivant ce procédé, et faisant pour abréger

$$\frac{d\,Fa}{d\,fa} = z',\ \frac{d\,z'}{d\,fa} = z'',\ \frac{d\,z''}{d\,fa} = z''' + \text{etc.}$$

on aura généralement

$$F(a+x) = Fa + s\,z' + \frac{s^2}{1.2}\cdot z'' + \frac{s^3}{1.2.3}\cdot z''' + \text{etc.}$$

Comme dans ce théorême fa est une fonction arbitraire, on peut toujours l'adopter de manière que les valeurs de z' z'' z''' etc. suivent une loi simple. En faisant $f(a+x) = a+x$ et $fa = a$, notre théorême se réduit à celui de Taylor, qui, par conséquent, n'en est qu'un cas particulier.

On pourrait tirer de ce théorême quelques corollaires assez intéressans; mais ils seraient étrangers à mon but principal, dont je ne veux pas me détourner ici.

Appliquons ce théorême aux logarithmes intégraux. Nous avons $F(a+x) = \text{li.}\,(a+x)$, et par conséquent $d\,Fa = \frac{da}{\text{l.}\,a}$, $d^2 Fa = -\frac{da^2}{a(\text{l.}\,a)^2}$ etc. Par

ces deux différences il est aisé de voir, que les valeurs de z', z'', z''' etc. deviendront les plus régulières si l'on fait $f a = \text{l.}\, a$. De cette manière nous aurons

$$z' = \frac{a}{\text{l.}\, a}, \quad z'' = a \cdot \frac{\text{l.}\, a - 1}{(\text{l.}\, a)^2}, \quad z''' = a \cdot \frac{(\text{l.}\, a)^2 - 2\, \text{l.}\, a + 2.1}{(\text{l.}\, a)^3} \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$\text{li.}\,(a + x) = \text{li.}\, a + \text{l.}\,(1 + \tfrac{x}{a}) . \frac{a}{\text{l.}\, a} + \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^2 . a}{1.2.(\text{l.}\, a)^2} \{\text{l.}\, a - 1\}$$

$$+ \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^3 . a}{1.2.3.(\text{l.}\, a)^3} \{(\text{l.}\, a)^2 - 2\, \text{l.}\, a + 2.1\}$$

$$+ \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^4 . a}{1.2.3.4.(\text{l.}\, a)^4} \{(\text{l.}\, a)^3 - 3\,(\text{l.}\, a)^2 + 3.2\, \text{l.}\, a - 3.2.1\}$$

$$+ \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^5 . a}{1.2.3.4.5\,(\text{l.}\, a)^5} \{(\text{l.}\, a)^4 - 4\,(\text{l.}\, a)^3 + 4.3\,(\text{l.}\, a)^2 - 4.3.2\, \text{l.}\, a + 4.3.2.1\}$$

$$+ \text{ etc.}$$

Mais en observant que,

$$\text{l.}\,(1 + \tfrac{x}{a}) + \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^2}{1.2} + \frac{\{\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a})\}^3}{1.2.3} + \text{etc.} = \frac{x}{a},$$

et faisant $\text{l.}\,(1 + \frac{x}{a}) = y$, et puis

$$\begin{aligned} A'' &= 1 \\ A''' &= 1\, A'' - \text{l.}\, a \\ A'''' &= 2\, A''' + (\text{l.}\, a)^2 \\ A^{v} &= 3\, A'''' - (\text{l.}\, a)^3 \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

on peut donner à l'expression précédente la forme suivante

$$\text{li.}\,(a + x) = \text{li.}\, a + \frac{x}{\text{l.}\, a} - \frac{1\, a\, A''}{1.2\,(\text{l.}\, a)^2} . y^2 + \frac{2\, a\, A'''}{1.2.3\,(\text{l.}\, a)^3} . y^3 - \frac{3\, a\, A''''}{1.2.3.4\,(\text{l.}\, a)^4} . y^4 + \text{etc.} \quad (6)$$

Cette série sera très convergente, quand $\frac{x}{a}$ est une petite fraction; parceque dans ce cas $y = l. (1 + \frac{x}{a})$ est très petit.

13. On sait que de certaines relations ont facilité beaucoup la construction des tables de logarithmes. En réduisant donc une nouvelle fonction en tables, il est intéressant de savoir si cette fonction a des relations ou non. Voici une méthode pour faire cette recherche.

En examinant bien la chose, on trouvera que cette recherche se réduit au principe suivant:

„Si la fonction $\int dx. Fx$, où Fx est une fonction quelconque de x, a „une relation, il y aura une certaine fonction fx qui, substituée dans $\int dx. Fx$ „pour x, ne changera pas la forme de l'intégrale.„

Ainsi, si l'on fait

$$\int dx. Fx = F'x,$$

il faut que

$$F'(fx) = B. F'x + C;$$

où B et C sont des grandeurs constantes. Cela posé. De la dernière équation on tire, par la différentiation,

$$\frac{F(fx)}{Fx} \cdot \frac{dfx}{dx} = B.$$

C'est donc l'équation de condition à laquelle il faut satisfaire. Ou, pour m'exprimer autrement, si une relation entre fx et x dans $\int dx\ Fx$ doit exister, il faut que fx soit telle que l'expression

$$\frac{F(fx)}{Fx} \cdot \frac{dfx}{dx}$$

devienne constante; et alors on aura la relation

$$F'(fx) = B\ F'x + C$$

Eclaircissons ceci par quelques exemples.

1. Exemple. Soit $Fx = \frac{1}{x}$, et $F'x = \text{l.}x$, on aura l'équation de condition

$$\frac{x\,d\,fx}{fx\,.\,dx} = B,$$

et la relation

$$\text{l.}\,fx = B\,\text{l.}\,x + C.$$

Il est aisé de voir, que l'on satisfera à l'équation de condition en faisant $fx = nx$, ou $fx = x^n$. Or dans le dernier cas, par exemple, on trouvera $B = n$, et, en supposant que la fonction $\text{l.}\,x$ disparaisse lorsque $x = 1$, on aura

$$\text{l.}\,x^n = n\,\text{l.}\,x;$$

relation connue des logarithmes.

2. Exemple. Soit $Fx = \frac{1}{1+x^2}$ et $F'x = \text{Arc. tang. } x$, l'équation générale de condition se changera en celle-ci

$$\frac{1+x^2}{1+(fx)^2}\cdot\frac{d\,fx}{dx} = B;$$

et on aura la relation

$$\text{Arc. tang. } fx = B\,\text{Arc. tang. } x + C.$$

On trouvera facilement qu'on peut satisfaire à l'équation de condition en faisant $fx = \frac{1}{x}$. Cette valeur de fx nous donnera $B = -1$, et, par conséquent, la relation

$$\text{Arc. tang. } \frac{1}{x} = C - \text{Arc. tang. } x.$$

Si nous faisons $\text{Arc. tang. } x = \phi$, nous aurons $x = \text{tang. } \phi$. En substituant cette valeur de x dans la relation, et supposant Arc. tang. 1 connu, on aura

$$\frac{1}{\text{tang. } \phi} = \text{tang. } (2\,\text{Arc. tang. } 1 - \phi).$$

3. Exemple. Soit $Fx = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$, et $F'x = \text{Arc. cos. } x$, l'équation de condition sera

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-(fx)^2)}}\cdot\frac{d\,fx}{dx} = B,$$

et la relation

$$\text{Arc. cos } (fx) = B. \text{ Arc. cos. } x + C.$$

Si nous faisons ici $fx = 2x^2 - 1$, nous aurons $B = 2$; et cela donne la relation

$$\text{Arc. cos } (2x^2 - 1) = 2 \text{ Arc. cos. } x + C.$$

La fonction Arc. cos. x doit être nulle lorsque $x = 1$, nous avons donc $C = 0$. Maintenant, si nous faisons Arc. cos. $x = \phi$, la relation trouvée se changera en celle-ci

$$2 \cos.^2 \phi - 1 = \cos. 2\phi ;$$

ce qui est connu.

De cette manière on pourrait trouver toutes les relations des fonctions trigonométriques; considérées seulement comme fonctions intégrales, et abstraction faite de leurs propriétés géométriques.

En appliquant cette méthode à notre nouvelle fonction, on a $Fx = \frac{1}{\text{l}.x}$, et $F'x = \text{li}.x$; ce qui donne l'équation de condition

$$\frac{\text{l}.\,x}{\text{l}.\,fx} \cdot \frac{d\,fx}{dx} = B,$$

et la relation

$$\text{li}.\,fx = B\ \text{li}.\ x + C.$$

Mais je n'ai pu trouver une valeur de fx qui satisfasse à l'équation de condition.

La théorie, que nous avons exposée dans ce chapitre, suffira à réduire notre fonction en tables. Je parlerai au chapitre suivant des méthodes particulières, que j'ai suivies dans le calcul.

CHAPITRE III.

Construction et usage des tables de logarithmes intégraux.

14. Rassamblons ici les différens résultats auxquels nous sommes parvenus. En désignat par H la constante déterminée dans le n°. 9, nous avons les formules suivantes pour calculer les logarithmes intégraux.

$$\text{li. } x = H + \text{ll}\,x + \text{l}\,x + \frac{(\text{l}\,x)^2}{1.2.2} + \frac{(\text{l}\,x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.} \qquad (1)$$

$$\text{li. } \frac{1}{x} = H + \text{ll}\,x - \text{l}\,x + \frac{(\text{l}\,x)^2}{1.2.2} - \frac{(\text{l}\,x)^3}{1.2.3.3} + \text{etc.} \qquad (2)$$

$$\text{li. } (1 + x) = H + \text{l}\,x + A^{(1)}x - \tfrac{1}{2}A^{(2)}x^2 + \tfrac{1}{3}A^{(3)}x^3 - \text{etc.} \quad (3)$$

$$\text{li. } (1 - x) = H + \text{l}\,x - A^{(1)}x - \tfrac{1}{2}A^{(2)}x^2 - \tfrac{1}{3}A^{(3)}x^3 - \text{etc.} \quad (4)$$

En faisant $\frac{1}{\text{l}\,x} = q$, on a

$$\text{li. } \frac{1}{x} = -\frac{q}{x} \cdot \cfrac{1}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{2q}{1 + \cfrac{3q}{1 + \text{etc.}}}}}}} \qquad (5)$$

$$\text{li. } (a+x) = \text{li. } a + \frac{x}{\text{l}\,a} - \frac{1\,a\,A''}{1.2(\text{l}.a)^2}\cdot y^2 + \frac{2\,a\,A'''}{1.2.3(\text{l}\,a)^3}\cdot y^3 - \frac{3\,a\,A''''}{1.2.3.4\,(\text{l}\,a)^4}\cdot y^4 + \text{etc.}; \quad (6)$$

où $y = \text{l}.\,(1 + \frac{x}{a})$, et

$$\begin{aligned} A'' &= 1 \\ A''' &= 1\,A'' - \text{l}\,a \\ A'''' &= 2\,A''' + (\text{l}\,a)^2 \\ A^{v} &= 3\,A'''' - (\text{l}\,a)^3 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Les douze premiers coefficiens constans des séries (3) et (4), avec leurs logarithmes tabulaires, sont:

$A^{(1)} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} A^{(2)} = \frac{1}{24}$

$\frac{1}{3} A^{(3)} = \frac{1}{72}$

$\frac{1}{4} A^{(4)} = \frac{19}{2880}$.

$\frac{1}{5} A^{(5)} = \frac{3}{800}$

$\frac{1}{6} A^{(6)} = \frac{863}{362880}$

$\frac{1}{7} A^{(7)} = \frac{275}{169344}$

$\frac{1}{8} A^{(8)} = 0{,}0011695670 5$

$\frac{1}{9} A^{(9)} = 0{,}000876950 44$

$\frac{1}{10} A^{(10)} = 0{,}000678584 93$

$\frac{1}{11} A^{(11)} = 0{,}000538550 62$

$\frac{1}{12} A^{(12)} = 0{,}000438074 61$

$\log. \frac{1}{2} A^{(2)} = 0{,}6197887583 - 2$

$\log. \frac{1}{3} A^{(3)} = 0{,}1426675 04 - 2$

$\log. \frac{1}{4} A^{(4)} = 0{,}81936111 3 - 3$

$\log. \frac{1}{5} A^{(5)} = 0{,}5740312 7 - 3,$

$\log. \frac{1}{6} A^{(6)} = 0{,}3762477 6 - 3$

$\log. \frac{1}{7} A^{(7)} = 0{,}210562 9 - 3$

$\log. \frac{1}{8} A^{(8)} = 0{,}068025 1 - 3$

$\log. \frac{1}{9} A^{(9)} = 0{,}942975 - 4$

$\log \frac{1}{10} A^{(10)} = 0{,}831604 - 4$

$\log. \frac{1}{11} A^{(11)} = 0{,}73123 - 4$

$\log. \frac{1}{12} A^{(12)} = 0{,}64155 - 4$

Par le procédé, que nous avons indiqué dans le nº. 10, on tire de la fraction continue les fractions ordinaires suivantes; et que l'on pourrait facilement continuer encore.

$$R^{(1)} = \frac{1}{1+q}\ , \quad R^{(2)} = \frac{1+q}{1+2q}\ , \quad R^{(3)} = \frac{1+3q}{1+4q+2q^2}\ ,$$

$$R^{(4)} = \frac{1+5q+2q^2}{1+6q+6q^2}\ , \quad R^{(5)} = \frac{1+8q+11q^2}{1+9q+18q^2+6q^3}\ ,$$

$$R^{(6)} = \frac{1+11q+26q^2+6q^3}{1+12q+36q^2+24q^3}\ , \quad R^{(7)} = \frac{1+15q+58q^2+50q^3}{1+16q+72q^2+96q^3+24q^4}\ ,$$

$$R^{(8)} = \frac{1+19q+102q^2+154q^3+24q^4}{1+20q+120q^2+240q^3+120q^4}\ ,$$

$$R^{(9)} = \frac{1+24q+177q^2+444q^3+274q^4}{1+25q+200q^2+600q^3+600q^4+120q^5}\ ,$$

$$R^{(10)} = \frac{1 + 29q + 272q^2 + 954q^3 + 1044q^4 + 120q^5}{1 + 30q + 300q^2 + 1200q^3 + 1800q^4 + 720q^5},$$

$$R^{(11)} = \frac{1 + 35q + 416q^2 + 2016q^3 + 3708q^4 + 1764q^5}{1 + 36q + 450q^2 + 2400q^3 + 5400q^4 + 4320q^5 + 720q^6},$$

$$R^{(12)} = \frac{1 + 41q + 590q^2 + 3648q^3 + 9432q^4 + 8028q^5 + 720q^6}{1 + 42q + 630q^2 + 4200q^3 + 12600q^4 + 15120q^5 + 5040q^6},$$

Pour faire usage de ces fractions ordinaires, il faut les multiplier par $-\frac{q}{x}$, et alors elles sont alternativement plus petites et plus grandes que li. $\frac{1}{x}$.

15. Pour construire la table de logarithmes intégraux, je me suis servi de la méthode suivante. J'ai calculé, sur la formule (2) du numéro précédent, li. 0,1 à dix décimales; et comme les formules (1) et (2) ne diffèrent que dans les signes des puissances impaires de l. x, la même opération m'a donné aussi li. 10. En partant de li. 0,1, j'ai calculé, au moyen de la formule (6), li. 0,09, li. 0,08 etc. jusques et compris li. 0,03. A 0,03 la fraction continue (5) est déja très convergente, et en calculant aussi le li. 0,03 sur la fraction continue, la comparaison de ces deux résultats m'a servi de vérification pour tout le calcul que j'avais fait jusqu'ici. Après avoir achevé cette partie de la table, j'ai calculé, sur la formule (2), li. 0,2, li. 0,3, li. 0,4, li. 0,5 et li. 0,6. Et puis, pour remplir l'intervalle entre 0,1 et 0,2, j'ai déterminé les coefficiens de (6) en supposant $a = 0,15$. Ces coefficiens donnés, j'ai d'abord fait $x = -0,05$, et, en comparant ce résultat avec li. 0,1, j'ai obtenu li. 0,15. Puis j'ai fait $x = 0,05$ ce qui m'a donné li. 0,2; et comme ce dernier était déjà connu, j'avais une vérification pour le calcul des coefficiens de (6). J'ai rempli les intervalles entre 0,2 et 0,3; entre 0,3 et 0,4; entre 0,4 et 0,5 et entre 0,5 et 0,6 de la même manière. A compter de 0,6 je pouvais faire usage de la formule (4), qui est plus commode que la formule (2); et c'est sur cette formule que j'ai calculé immédiatement tous les logarithmes intégraux depuis 0,6 jusqu'à 1.

Depuis 1 je me suis servi de la formule (3) jusqu'à 1,4, et depuis 1,4 jusqu'à 10 de la formule (1). Au delà de 10 la formule (1) devient trop pénible, et il me fallait déjà calculer dix-huit termes pour avoir li. 10 à dix décimales

exactes. Je ne sais d'autre moyen, pour continuer ici la table, que la formule (6). La manière dont je l'ai employée est toute analogue à celle dont j'ai rempli l'intervalle entre 0,1 et 0,2. C'est-à-dire, j'ai déterminé les coefficiens en faisant $a = 15$, et la supposition de $x = -5$ m'a donné un nombre qui, ajouté au li. 10, donnait li. 15. Le li. 15 étant donné, je pouvais aller avec les mêmes coefficiens jusqu'à 20. La supposition de $a = 30$ m'a donné les logarithmes intégraux depuis 20 jusqu'à 40, et celle de $a = 60$ m'a donné les logarithmes intégraux depuis 40 jusqu'à 80: et ainsi du reste en doublant toujours a.

Je n'ai calculé les logarithmes intégraux entre 20 et 40 que de deux en deux nombres, et entre 40 et 80 de cinq en cinq etc.; mais on verra que cette étendue est suffisante, quand je parlerai de l'usage de la table.

J'ai terminé ce calcul pénible à 1280; parcequ'il me semble qu'on n'aura que très rarpment besoin des logarithmes intégraux de nombres plus grands. Si l'on voulait continuer la table, il faudrait avoir, pour cette continuation, le li. 1280 à plus de décimales; parcequ'il est toujours nécessaire de calculer avec plus de figures que l'on n'en veut conserver dans la table. Le voici avec sept décimales, tel que mon calcul me l'avait donné,

$$\text{li. } 1280 = 217{,}4076053.$$

On voit, par ce qui précéde, que ma table est déstituée d'une vérification directe au delà de 10; ce qui est un grand défaut. J'ai pris toutes les précautions possibles; mais cepandant on n'est jamais sûr de ne pas se tromper dans un si long calcul. Le seul moyen, peut-être, de se procurer une vérification, pour cette partie de table, serait de sommer la série li. a + li. $2a$ + li. $3a$ + ··· + li. xa par la méthode qu'Euler à donnée dans son Traité du calcul différentiel (partie II, art. 130); mais l'application en deviendrait trés fastidieuse.

Usage de la table de logarithmes intégraux des nombres plus petits que l'unité.

16. Si l'on veut chercher le logarithme intégral d'un nombre entre 0,04 et 0,6 ou 0,7, on peut faire usage de la méthode ordinaire d'interpolation; et en cas, que le calcul avec les trois différences, qu'on trouve dans la table, ne soit pas assez exact, on prendra encore la quatrième différence à vue sur la troi-

siéme. A l'usage de notre table, où les intervalles sont toujours de centièmes, on peut donner à la formule connue d'interpolation la forme suivante:

$$\text{li.}(a+x) = \text{li.}\,a + 100x.\Delta' + \frac{100x(1-100x)}{1\,.\,2}.\Delta'' + \frac{100x(1-100x)(2-100x)}{1\,.\,2\,.\,3}.\Delta''' - \cdots;$$

où Δ' est la première différence, Δ'' la seconde différence etc.; a le nombre que l'on trouve dans la table comme le plus proche du nombre donné; et x l'excès positif du nombre donné sur a.

Exemple. Si l'on veut chercher le logarithme intégral qui appartient au nombre 0,240686, on fera $a = 0{,}24$ et $x = 0{,}000686$. La table donne $\Delta' = 71100$, $\Delta'' = 2082$ et $\Delta''' = 37$. Avec ces données on aura le type suivant

0,1115521	= li. a
+ 48774	prem. terme
− 665	sec. ter.
+ 8	trois. ter.
0,1120332 7	

Depuis 0 jusqu'à 1 tous les logarithmes intégraux sont négatifs; on a donc, à sept décimales,

$$\text{li. } 0{,}240686 = -\,0{,}1120333.$$

Au lieu de la formule ordinaire d'interpolation, on pourrait aussi se servir de la formule (6) du no. 14, en observant seulement qu'ici l. a est toujours négatif.

Les différences dans la table depuis 0 jusqu'à 0,04 étant trop grandes pour qu'on puisse enterpoler avec succès, il faut calculer immédiatement sur la formule (5). Et pour faciliter ce calcul, je donne ici différentes expressions que j'ai déduites de la fraction continue.

$$\text{li.}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\,\text{l}x}\cdot\frac{24 + 154.\text{l}x + 102(\text{l}x)^2 + 19(\text{l}x)^3 + (\text{l}x)^4}{120 + 240.\text{l}x + 120(\text{l}x)^2 + 20(\text{l}x)^3 + (\text{l}x)^4},$$

$$\text{li.}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\,\mathrm{l}x}\cdot\frac{120+1044.\mathrm{l}x+954(\mathrm{l}x)^2+272(\mathrm{l}x)^3+29(\mathrm{l}x)^4+(\mathrm{l}x)^5}{720+1800.\mathrm{l}x+1200(\mathrm{l}x)^2+300(\mathrm{l}x)^3+30(\mathrm{l}x)^4+(\mathrm{l}x)^5},$$

$$\text{li.}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x\,\mathrm{l}x}\cdot\frac{720+8028.\mathrm{l}x+9432(\mathrm{l}x)^2+3648(\mathrm{l}x)^3+590(\mathrm{l}x)^4+41(\mathrm{l}x)^5+(\mathrm{l}x)^6}{5040+15120.\mathrm{l}x+12600(\mathrm{l}x)^2+4200(\mathrm{l}x)^3+630(\mathrm{l}x)^4+42(\mathrm{l}x)^5+(\mathrm{l}x)^6}.$$

Ces expressions sont exactes à sept décimales; la première jusqu'à $\frac{1}{x} = 0,01$, la seconde jusqu'à $\frac{1}{x} = 0,02$ et la troisième jusqu'à $\frac{1}{x} = 0,04$.

A 0,6 ou 0,7 les différences commencent à devenir très fortes, et elles vont augmenter de maniére qu'au delà de 0,8 elles ne sont plus d'aucun usage. Mais heureusement, nos séries sont extrêmement convergentes pour cette partie de la table; et depuis 0,6 jusqu'à 1 on peut employer la série (4) qui est très commode. C'est aussi pour ce fréquent usage de la série (4) que j'ai apposé, dans le no. 14, aux coefficiens $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ etc. leurs logarithmes tabulaires.

Usage de la table de logarithmes intégraux des nombres plus grands que l'unité.

Si l'on veut chercher le logarithme intégral qui appartient à un nombre entre 1 et 3, on le calculera immédiatement sur la série (1); et en cas que le nombre soit plus petit que 1,4, on préférera la série (3). Depuis 3 jusqu'à la fin de la table on peut employer la formule (6) pour trouver les logarithmes intégraux par interpolation. En voici des exemples:

1. Exemple. Si l'on veut chercher le logarithme intégral qui appartient au nombre 10,24, on fera dans (6) $a = 10$ et $x = 0,24$. Avec ces données on trouvera $A''' = -1,302585$, $A^{\text{IV}} = 2,69673$, $1 + \frac{x}{a} = \frac{1024}{1000}$, $y = 0,02371653$ et puis

6,1655995	= li. a
+ 10423067	= x : l. a
− 53044	prem. t. de la série
− 474	sec. terme
− 4	trois. terme
6,26929495	= li. 10,24.

Comme ici la 8ième décimale est 5, il reste incertain s'il faut augmenter la 7ième d'une unité, pour avoir li. 10, 24 avec sept décimales exactes.

2. Exemple. Soit 116, 2 le nombre dont on demande le logarithme intégral. Comme ce nombre est plus proche de 120 que de 110, je fais $a = 120$ et $x = -3,8$; ce qui me donne

$A''' = -3,787492$, $A^{iv} = 15,3451$, $1 + \frac{x}{a} = \frac{1162}{1200}$ et
$y = -0,03217890$. Et puis j'ai:

$$\begin{array}{rl} 34,382807 & = \text{li.}\, a \\ -7937351 & = x : l\, a \\ -27107 & \text{prem. terme} \\ +460 & \text{sec. terme} \\ -5 & \text{trois. terme} \\ \hline 33,586407 & = \text{li. } 116,2. \end{array}$$

Le problême inverse, c'est-à-dire, trouver le nombre auquel appartient un logarithme intégral donné, se résout le plus commodément par des approximations successives; dont voici la méthode:

Soit m le logarithme intégral donné. Je cherche, moyennant les tables, à-peu-près le nombre auquel il appartient, en prenant seulement la première différence. Soit a ce nombre, et $a + \alpha$ soit la première valeur approchée du nombre cherché. Cela posé; on aura $m = \text{li.}\,(a + \alpha)$, à-peu-près. Mais en supposant α si petit que l'on en peut négliger le carré, on a, par la formule (6) du no. 12, $\text{li.}\,(a + \alpha) = \text{li.}\, a + \alpha : l\, a$; d'où il s'ensuit

$$\alpha = \{m - \text{li.}\, a\} . l\, a \;;$$

et l'on aura, pour une première valeur approchée du nombre cherché, $a + \alpha$. Présentement si l'on substitue cette valeur dans l'expression précédente, on aura

$$\alpha' = \{m - \text{li.}\,(a + \alpha)\} \cdot l\,(a + \alpha) \;;$$

et la seconde valeur approchée sera $a + \alpha + \alpha'$. Si l'on substitue encore $a + \alpha + \alpha'$, pour $a + \alpha$, on aura

$$\alpha'' = \{m - \text{li.}\,(a + \alpha + \alpha')\} \cdot l\,(a + \alpha + \alpha') \;;$$

et la troisiéme valeur approchée sera $a + \alpha + \alpha' + \alpha''$. En continuant de cette manière jusqu'à ce qu'on parvienne à une valeur de α que l'on peut négliger, on aura le nombre cherché $a + \alpha + \alpha' + \alpha'' +$ etc.

Exemple. Soit 33,586407 le logarithme intégral donné. Je vois dans la table que le nombre qui appartient à ce logarithme intégral est entre 110 et 120; je retranche le logarithme intégral de 110 de celui de 120, pour avoir la première différence que je trouve 2,1077; je retranche encore le logarithme intégral de 110 de mon logarithme intégral donné, et j'ai 1,3113; je fais $2,1077 : 1,3113 = 10 : a - 110$; ce qui me donne enfin $a = 116,22$. Maintenant je cherche le logarithme intégral de a dans la table, et je trouve li. $a =$ 33,590613. Ce li. a trouvé, j'ai $m -$ li. $a = -0,004206$, d'où il s'ensuit $\alpha = -0,0200016$, et j'ai la première valeur approchée $a + \alpha = 116,1999984$. Je cherche encore le logarithme intégral de $a + \alpha$, et je trouve li. $(a + \alpha) =$ 33,586406, d'où je tire $\alpha' = 0,0000047$ et $a + \alpha + \alpha' = 116,2000031$.

On voit, par cet exemple, qu'on ne peut pas repondre de la sixième décimale, et que l'on aurait pu se contenter de la première valeur approchée; notre nombre cherché sera donc 116,2.

Dans la table depuis 0 jusqu'à 1 on pourrait employer la même méthode pour trouver le nombre qui appartient à un logarithme intégral donné; mais il est plus commode de tirer ici les approximations successives de la formule ordinaire d'interpolation. Cette formule donnera, dans la supposition de α très-petit,

$$\alpha = \frac{m - \text{li. } a}{100\,(\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'' + \frac{1}{3}\Delta''' - \text{etc.})},$$

$$\alpha' = \frac{m - \text{li. } (a + \alpha)}{100\,(\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'' + \frac{1}{3}\Delta''' - \text{etc.})}$$

$$\alpha'' = \frac{m - \text{li. } (a + \alpha + \alpha')}{100\,(\Delta' - \frac{1}{2}\Delta'' + \frac{1}{3}\Delta''' - \text{etc.})}$$

etc.;

et le nombre cherché sera $a + \alpha + \alpha' +$ etc. Comme le calcul sur ces formules ne diffère pas du précédent, il serait superflu d'en rapporter un exemple.

En se servant des différentes méthodes d'interpolation, que nous avons indiquées, la table des logarithmes intégraux donne la fonction $\int \frac{dx}{l.\,x}$ pour tous les nombres depuis x nul jusqu'à x égal à 1280. Et comme il me semble, qu'il n'y ait que fort peu de cas où il faudrait une plus grande étendue à la table; on peut regarder cette fonction comme connue, èt y recourir, dans le calcul intégral, comme on a coûtume de recourir aux logarithmes et aux arcs de cercle.

Cette fonction supposée connue, je montrerai dans le chapitre quatrième et dernier son principal usage dans l'analyse.

CHAPITRE IV.

Usage des logarithmes intégraux dans l'analyse.

17. Pour ce qui regarde l'algorithme de la nouvelle fonction, on remarquera avant tout que,

$$d.\,\text{li.}\,x = \frac{dx}{l.\,x},$$

et par conséquent

$$d.\,\text{li.}\,fx = \frac{d.fx}{l.\,fx},$$

fx étant une fonction quelconque de x.

En dénotant toujours par l les logarithmes hyperboliques, et par e le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, les intégrales simples, que l'on peut ramener aux logarithmes intégraux, sont:

1) $\int \frac{dx}{l.\,x} = \text{li.}\,x,$ $\qquad\qquad \int \frac{x^m\,dx}{l.\,x} = \text{li.}\,x^{m+1},$

2) $\int \frac{dx}{l\,(1+x)} = \text{li.}\,(1+x)$, $\qquad \int \frac{dx}{l.(a+bx)} = \frac{1}{b}\,\text{li.}\,(a+bx)$,

3) $\int \frac{e^x.dx}{x} = \text{li.}\,e^x$, $\qquad \int \frac{e^{ax^n}.dx}{x} = \frac{1}{n}.\text{li.}\,e^{ax^n}$,

4) $\int e^{e^x}.\,dx = \text{li.}\,e^{e^x}$, $\qquad \int e^{ae^{bx}}.\,dx = \frac{1}{b}.\,\text{li.}\,e^{ae^{bx}}$,

5) $\int \frac{e^x.dx}{a+x} = e^{-a}.\,\text{li.}\,e^{a+x}$,

6) $\int \frac{dx}{x\,\text{ll.}\,x} = \text{li.}\,\text{l.}\,x$;

et les intégrales composées:

7) $$\int \frac{x^{m-1}\,dx}{(l\,x)^n} = -\frac{x^m}{(n-1)(lx)^{n-1}}\cdot\left\{1+\frac{m.\,lx}{n-2}+\frac{m^2\,(lx)^2}{(n-2)(n-3)}+\cdots+\frac{m^{n-2}\,(lx)^{n-2}}{(n-2)(n-3)\ldots 1}\right\}$$
$$+\frac{m^{n-1}}{(n-1)(n-2)\ldots 1}\cdot\text{li.}\,x^m ,$$

n étant un nombre entier et positif,

8) $$\int \frac{e^{ax^n}\,dx}{x^{m+1}} = -\frac{e^{ax^n}}{m\,x^m}\cdot\left\{1+\frac{anx^n}{m-n}+\frac{a^2n^2x^{2n}}{(m-n)\,(m-2n)}+\cdots+\frac{(an)^{\frac{m-n}{n}}.\,x^{m-n}}{(m-n)(m-2n)\cdots n}\right\}$$
$$+\frac{a^{\frac{m}{n}}.\,n^{\frac{m-n}{n}}}{m(m-n)(m-2n)\ldots n}.\,\text{li.}\,e^{ax^n} ;$$

$\frac{m}{n}$ étant un nombre entier et positif.

On a encore

9) $\int dx.\,\text{li.}\,x = x\,\text{li.}\,x - \text{li.}\,x^2$, $\qquad \int x^n\,dx.\,\text{li.}\,x = \frac{x^{n+1}}{n+1}.\,\text{li.}\,x - \frac{1}{n+1}.\,\text{li.}\,x^{n+2}$

10) $\int dx.\,\text{li.}\,x^m = x\,\text{li.}\,x^m - \text{li.}\,x^{m+1}$, $\qquad \int dx.\,\text{li.}\,fx = x\,\text{li.}\,fx - \int\frac{x\,d.\,fx}{\text{l.}\,fx}$.

Voilà les principales différentielles dont l'intégration dépend des logarithmes intégraux. Les démonstrations de ces formules sont si faciles que je n'ai pas besoin de les exposer ici; les formules 7) et 8) se trouvent par le théorême du n° 4.

18. Pour montrer l'usage des logarithmes intégraux dans les problêmes de physique, considérons le mouvement d'un corps dans notre atmosphère, regardée comme milieu résistant.

Problême. Un globe du diamètre D et de la densité R soit lancé de bas en haut, suivant une ligne droite perpendiculaire à la superficie de la terre, avec la vîtesse initiale c: trouver la vitesse v que le globe aura à une hauteur de x mètres.

Si nous désignons par (ϱ) la densité de l'air à la superficie de la terre, et par ϱ celle à la hauteur de x mètres, nous aurons, à la température de la glace fondante,

$$\varrho = (\varrho) . e^{-\frac{x}{7963}} ;$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. (*Voyez* Mécanique céleste liv. X, n° 14). Faisons encore, pour abréger, $7963 = n$ et $\frac{3(\varrho)}{8RD} = r$; et nous aurons, pour déterminer le mouvement de notre globe, l'équation différentielle

$$\frac{ddx}{dt^2} + g + rv^2 e^{-\frac{x}{n}} = 0 \quad ; \qquad (a)$$

où g est la pesanteur à la superficie de la terre, ou $g = 7,2986$ mètres sous l'équateur; et t le tems que le globe met à monter à la hauteur x. La démonstration de cette équation se trouve dans tout traité de mécanique; et pour ce qui regarde la résistance, j'ai suivi Newton. (*Princip. phil. nat. lib. II, prop.* 40).

Cela posé. Si nous multiplions notre équation par dx, nous aurons

$$-g\,dx = v\,dv + rv^2 e^{-\frac{x}{n}}\,dx \;; \qquad \text{(b)}$$

parcequ'on a généralement $\frac{ddx.dx}{dt^2} = vdv$.

L'équation différentielle (b) n'est pas complète, mais on la rendra complète en la multipliant par une fonction de x que l'on déterminera ainsi : Soit fx cette fonction de x, la condition que l'équation (b) doit être complète, après avoir été multipliée par fx, nous donne

$$\left(\frac{d.vfx}{dx}\right) = \left(\frac{d.rv^2 e^{-\frac{x}{n}}.fx}{dv}\right) \;;$$

d'où l'on tire $fx = e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}}$. En multipliant l'équation (b) par cette valeur de fx et intégrant, on aura, par 4) du nº 17,

$$2gn.\,\text{li}.\,e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}} = v^2.\,e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}} + \text{constante}. \qquad \text{(c)}$$

La constante se détermine de manière que $v = c$ lorsque $x = 0$; et il s'ensuit

$$v^2 = c^2.\,e^{-2rn(1-e^{-\frac{x}{n}})} - 2gne^{2rne^{-\frac{x}{n}}}.\left\{\text{li}.\,e^{-2rn} - \text{li}.\,e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}}\right\}.$$

Par cette dernière expression on peut déterminer la vîtesse initiale qu'il faut donner au globe, pour qu'il atteigne une hauteur donnée b. Si le globe ne doit pas monter plus haut, $v = 0$ lorsque $x = b$, et cela donne

$$c^2 = 2gne^{2rn}.\left\{\text{li}.\,e^{-2rn} - \text{li}.\,e^{-2rne^{-\frac{h}{n}}}\right\}. \qquad \text{(d)}$$

Si l'on ne voulait pas avoir égard à la variation de la densité des couches atmosphériques, dans les différentes hauteurs, il faudrait faire n infiniment grand

dans les expressions précédentes. Dans ce cas l'expression (d) se change en celle-ci

$$\overset{2}{c} = \frac{g}{r} \cdot \left\{ e^{2rh} - 1 \right\} \; ; \qquad \text{(e)}$$

comme on trouvera facilement en observant que, lorsque x est infiniment grand, on a, par (5) du nº 10, li. $\frac{1}{x} = - \frac{1}{x\,\mathrm{l}.x}$.

Appliquons cette analyse à un exemple. Soit $\frac{R}{(\varrho)} = 5600$, ce qui suppose que la pesanteur spécifique de notre globe soit à-peu-près égale à celle du fer. Soit encore $D = 0,\overset{\text{mèt.}}{25}$ et $h = 4400$ mètres, ou la hauteur du Mont-blanc. Avec ces données on trouvera $2r = \frac{3}{5600}$, $e^{-2rn} = 0{,}01403932$ et $e^{-2rne^{-\frac{h}{n}}} = 0{,}08586962$. Les tables donnent

$$\text{li. } 0{,}01403932 = -\,0{,}0027428$$
$$\text{li. } 0{,}08586962 = -\,0{,}0264427\;;$$

et on aura enfin, par la formule (d)

$$c = \overset{\text{mèt.}}{442{,}97}.$$

C'est-à-dire: si le globe doit atteindre la hauteur de 4400 mètres, il faut lui donner une vitesse qui le fasse monter 442,97 mètres dans la première seconde décimale de tems. La formule (e) donnerait $c = \overset{\text{mèt.}}{510{,}4}$. Il s'ensuit donc que, si la densité des couches atmosphériques était la même dans toutes les hauteurs, il faudrait donner au globe une vîtesse initiale de $67^{\text{mèt.}}$ plus grande, pour le faire monter à la hauteur de 4400 mètres.

On voit par cet exemple qu'il est bien nécessaire d'avoir égard, dans de pareilles recherches, à la véritable constitution de l'atmosphère.

Si l'on veut déterminer la vîtesse que le globe aura dans une certaine hauteur x, en retombant de la heuteur b, on aura, au lieu de l'équation (a), l'équation différentielle

$$\frac{ddx}{dt^2} + g - rv^2 e^{-\frac{x}{n}} = 0 ;$$

ce qui revient à faire r négatif dans les expressions précédentes pour les appliquer à ce cas; et l'équation (d) en deviendra

$$c^2 = 2gne^{-2rn} \cdot \left\{ \text{li.}\, e^{2rn} - \text{li.}\, e^{2rne^{-\frac{h}{n}}} \right\} .$$

Par ce qui précéde on a $e^{2rn} = 71{,}22852$, $e^{2rne^{-\frac{h}{n}}} = 11{,}64556$; et l'on trouve par les tables $\text{li.}\, e^{2rn} = 23{,}650387$, $\text{li.}\, e^{2rne^{-\frac{h}{n}}} = 6{,}854267$, ce qui donne $c = 165{,}56$ mèt. Ou si notre globe est lancé perpendiculairement en haut avec une vîtesse initiale de 442,97 mètres, il retombera sur la superficie de la terre avec la vîtesse de 165,56 mètres.

Si l'on voulait résoudre le problême en question avec une rigueur absolue, il faudrait aussi avoir égard à la variation de la pesanteur. Si nous dénotons par a le demi-diamètre de la terre, la pesanteur dans une hauteur x sera $g \cdot \frac{a^2}{(a+x)^2}$; celle à la superficie de la terre étant g. Mais comme x sera toujours très-petit vis-à-vis de a, on peut faire, sans erreur sensible, $g \cdot \frac{a^2}{(a+x)^2} = g - 2g \cdot \frac{x}{a}$. Cette valeur, substituée dans les expressions précédentes, changera l'équation (c) en celle-ci

$$2gn.\, \text{li.}\, e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}} - \frac{4g}{a} . \int x\, dx . e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}} = v . e^{2 - 2rne^{-\frac{x}{n}}} + \text{constante}.$$

Il faudrait donc pouvoir encore déterminer l'intégrale $\int x\,dx.\,e^{-2rne^{-\frac{x}{n}}}$.

Pour la réduire à sa forme la plus simple, faisons généralement $e^{\alpha e^{\beta x}} = z$, et nous aurons

$$\int x\,dx.\,e^{\alpha e^{\beta x}} = \frac{1}{\beta^2}.\int \frac{\mathrm{ll}\,z}{\mathrm{l}\,z}.\,dz - \frac{\mathrm{l}\,\alpha}{\beta^2}.\int \frac{dz}{\mathrm{l}\,z}\ ;$$

d'où il s'ensuit que cette intégrale dépend des logarithmes intégraux et de la nouvelle transcendante $\int \frac{\mathrm{ll}\,z}{\mathrm{l}\,z}.\,dz$. Une recherche ultérieure sur cette intégrale me détournerait trop de mon but, qui est seulement de montrer l'usage des logarithmes intégraux.

19. Dans le n° 13, du dixième livre de la Mécanique céleste, il se trouve un problême qui dépend de l'intégrale $\int dx.\,e^{-\frac{f}{x}}$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$; e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, $f = 1{,}42459$ et par conséquent $e^{-f} = 0{,}240686$. Mr. de la Place réduit cette intégrale en fraction continue, par une méthode dont nous avons parlé dans notre n° 10, et de cette manière il trouve que l'intégrale est à-peu-près $\frac{1}{12}$: exactitude qui était suffisante au but qu'il avait. Mais les logarithmes intégraux supposés connus, la formule 8) du n° 17 donnera, en y faisant $a = -f$, $n = m = -1$,

$$\int dx.\,e^{-\frac{f}{x}} = x.\,e^{-\frac{f}{x}} + f.\ \mathrm{li}.\,e^{-\frac{f}{x}}\ ;$$

et depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$,

$$\int dx.\,e^{-\frac{f}{x}} = e^{-f} + f.\ \mathrm{li}.\,e^{-f}.$$

La table donne $\mathrm{li}.\,e^{-f} = -0{,}1120333$, comme on a vu dans le n°. 16, où nous avons choisi le nombre $0{,}240686$ ($= e^{-f}$) pour exemple d'interpolation.

On trouvera donc

$$\int dx \,.\, e^{-\frac{1}{x}} = 0{,}0810845.$$

Un douzième serait 0,08333...

Les intégrales prises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, Euler a trouvé:

$$\int \frac{dx}{lx}\,(x^m - x^n) = l.\frac{m+1}{n+1},$$

et

$$\int dx\left(\frac{1}{l.\,x} + \frac{1}{1-x}\right) = H;$$

où H est le nombre que nous avons déterminé dans le n°. 9. (Sur ces intégrales Voyez: *Nov. comment. Petrop. Tom.* XX, et *Nov. acta Petrop. Tom.* IV.) Mais les logarithmes intégraux admis, rien n'est plus facile que l'intégration générale de ces différentielles; car on a aussitôt, par la formule 1) du n°. 17,

$$\int \frac{dx}{lx}\,(x^m - x^n) = \text{li.}\, x^{m+1} - \text{li.}\, x^{n+1},$$

et

$$\int dx\left(\frac{1}{lx} + \frac{1}{1-x}\right) = \text{li.}\, x \quad - l.\,(1-x).$$

Pour déduire de ces expressions générales le cas particulier qu'Euler a considéré, il faut déterminer leurs valeurs lorsque $x = 0$ et lorsque $x = 1$. Si $x = 0$, les deux expressions sont nûlles; mais si $x = 1$, elles sont indéterminées; parcequ'elles deviennent égales à la différence de deux grandeurs infinies. Il faudra donc déterminer leurs limites quand x s'approche infiniment de l'unité. Dans ce cas la série (2) du n°. 14 donne

$$\text{li.}\, x^{m+1} = H + ll\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1} = H + l\,(m+1) + ll.\,\frac{1}{x};$$

d'où l'on tire

$$\text{li.}\, x^{m+1} - \text{li.}\, x^{n+1} = l.\,\frac{m+1}{n+1}.$$

Dans la même supposition, de x infiniment proche de l'unité, on a, par la formule (4) du même numéro,

$$\text{li.}\, x = H + l\,(1-x),$$

et partant

$$\text{li.}\, x - l\,(1-x) = H.$$

Ce que j'ai rapporté dans ce chapitre suffira à prouver l'utilité des logarithmes intégraux dans l'analyse. Peut-être que d'autres, plus habiles que moi, se détermineront à continuer et vérifier non seulement ma table de logarithmes intégraux; mais à réduire encore d'autres fonctions transcendantes en tables: vu que c'est le moyen le plus sûr de faciliter le calcul intégral.

Il ne sera pas inutile de remarquer encore ici, que la méthode, dont nous avons fait usage dans le n°. 9, pour déterminer la constante, peut servir dans beaucoup de cas à trouver les valeurs des intégrales définies. Pour en donner un exemple, prenons l'intégrale $\int e^{-x^2} dx$, prise depuis x nul jusqu'à x infini; dont Mr. de la Place a donné, dans le n°. 5 du dixième livre de la Mécanique céleste, une analyse très élégante, et qui peut être appliquée dans tous les cas où il s'agit de trouver la valeur du produit de deux intégrales définies.

On a, quand n est un nombre infiniment grand, $e^{-x^2} = (1 - \frac{x^2}{n})^n$; et, si l'on fait $1 - \frac{x^2}{n} = z^2$,

$$\int e^{-x^2} dx = \sqrt{n} . \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)}};$$

la nouvelle intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. On sait que, dans ces limites, le produit

$$\int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} . \int \frac{z^{2n+1} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{\pi}{2(2n+1)};$$

π étant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est l'unité, et n étant un nombre quelconque. (Voyez *Euleri Instit. calc. integr.* Tom. I, art. 332). Mais dans notre cas, où n est infiniment grand, 1 disparaît vis-à-vis de $2n$ et, par conséquent, nos deux intégrales sont identiques. Cela donne

$$n \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} . \int \frac{z^{2n} dz}{\sqrt{(1-z^2)}} = \frac{\pi}{4};$$

d'où l'on conclut

$$\int e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\pi} .$$

TABLES
DE
LOGARITHMES INTÉGRAUX.

Logarithmes intégraux de quelques nombres qui sont d'un intérèt particulier, avec dix décimales.

li. 1,4513692346 = 0

li. 0,1 = − 0,03223897896

li. 10 = 6,1655995048

li. e^{-1} = − 0,2193839344

li. e = 1,8951178164

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité.

Nomb.	li. —	Différence I.	Differ. II.	D. III. ∓
0,00	0,0000000	18297	5458	2128
0,01	0,0018297	23755	3330	598
0,02	0,0042052	27085	2732	309
0,03	0,0069137	29817	2423	190
0,04	0,0098954	32240	2233	125
0,05	0,0131194	34473	2108	88
0,06	0,0165667	36581	2023	63
0,07	0,0202248	38604	1960	42
0,08	0,0240852	40564	1918	31
0,09	0,0281416	42482	1887	21
0,10	0,0323898	44369	1866	11
0,11	0,0368267	46235	1855	7
0,12	0,0414502	48090	1848	0
0,13	0,0462592	49938	1848	5
0,14	0,0512530	51786	1853	8
0,15	0,0564316	53639	1861	13
0,16	0,0617955	55500	1874	16
0,17	0,0673455	57374	1890	18
0,18	0,0730829	59264	1908	23
0,19	0,0790093	61172	1931	24
0,20	0,0851265	63103	1955	28

N. Les li. des nombres plus petits que l'unité sont négatifs.

Nomb.	li. —	Différence I.	Differ. II.	D. III.
0,20	0,0851265	63103	1955	28
0,21	0,0914368	65058	1983	30
0,22	0,0979426	67041	2013	33
0,23	0,1046467	69054	2046	36
0,24	0,1115521	71100	2082	37
0,25	0,1186621	73182	2119	42
0,26	0,1259803	75301	2161	43
0,27	0,1335104	77462	2204	47
0,28	0,1412566	79666	2251	49
0,29	0,1492232	81917	2300	52
0,30	0,1574149	84217	2352	55
0,31	0,1658366	86569	2407	58
0,32	0,1744935	88976	2465	63
0,33	0,1833911	91441	2528	65
0,34	0,1925352	93969	2593	68
0,35	0,2019321	96562	2661	74
0,36	0,2115883	99223	2735	76
0,37	0,2215106	101958	2811	81
0,38	0,2317064	104769	2892	86
0,39	0,2421833	107661	2978	91
0,40	0,2529494	110639	3069	96

Nomb.	li. —	Différence I.	Différ. II.	D. III.
0,40	0,2529494	110639	3069	96
0,41	0,2640133	113708	3165	100
0,42	0,2753841	116873	3265	107
0,43	0,2870714	120138	3372	113
0,44	0,2990852	123510	3485	122
0,45	0,3114362	126995	3607	126
0,46	0,3241357	130602	3733	134
0,47	0,3371959	134335	3867	146
0,48	0,3506294	138202	4013	149
0,49	0,3644496	142215	4162	164
0,50	0,3786711	146377	4326	172
0,51	0,3933088	150703	4498	184
0,52	0,4083791	155201	4682	197
0,53	0,4238992	159883	4879	209
0,54	0,4398875	164762	5088	225
0,55	0,4563637	169850	5313	240
0,56	0,4733487	175163	5553	260
0,57	0,4908650	180716	5813	278
0,58	0,5089366	186529	6091	296
0,59	0,5275895	192620	6387	326
0,60	0,5468515	199007	6713	346

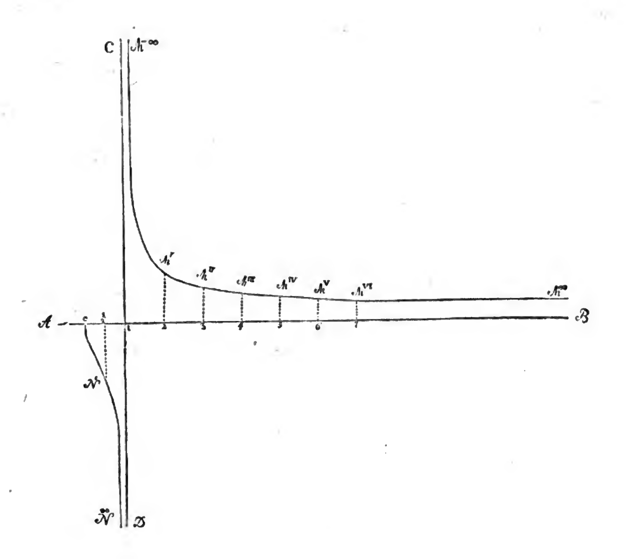
Nomb.	li. —	Différence I.	Differ. II.	D. III.
0,60	0,5468515	199007	6713	346
0,61	0,5667522	205720	7059	381
0,62	0,5873242	212779	7440	407
0,63	0,6086021	220219	7847	447
0,64	0,6306240	228066	8294	485
0,65	0,6534306	236360	8779	531
0,66	0,6770666	245139	9310	583
0,67	0,7015805	254449	9893	638
0,68	0,7270254	264342	10530	704
0,69	0,7534596	274873	11235	780
0,70	0,7809469	286108	12015	863
0,71	0,8095577	298123	12878	963
0,72	0,8393700	311001	13841	1074
0,73	0,8704701	324842	14915	1209
0,74	0,9029543	339757	16124	1362
0,75	0,9369300	355881	17486	1542
0,76	0,9725181	373367	19028	1762
0,77	1,0098548	392395	20790	2017
0,78	1,0490943	413185	22807	2327
0,79	1,0904128	435992	25134	2709
0,80	1,1340120	461126	27843	3170

Nomb.	li. —
0,80	1,1340120
0,81	1,1801246
0,82	1,2290215
0,83	1,2810197
0,84	1,3364941
0,85	1,3958924
0,86	1,4597547
0,87	1,5287419
0,88	1,6036733
0,89	1,6855829
0,90	1,7758007
0,91	1,8760780
0,92	1,9887871
0,93	2,1172535
0,94	2,2663481
0,95	2,4436226
0,96	2,6617277
0,97	2,9443801
0,98	3,3448241
0,99	4,0329587
1,00	infini.

Nomb.	li. ∓	Nomb.	li. +
1,0	infini	11	6,5919851
1,1	1,6757728	12	7,0005477
1,2	0,9337873	13	7,3965480
1,3	0,4801779	14	7,7808256
1,4	0,1449911	15	8,1548249
1,5	0,1250650	16	8,5197165
1,6	0,3537475	17	8,8764646
1,7	0,5537438	18	9,2258743
1,8	0,7326370	19	9,5686258
1,9	0,8953266	20	9,9053000
2,0	1,0451638	22	10,562353
2,5	1,6672946	24	11,200316
3	2,1635889	26	11,821734
4	2,9675853	28	12,428628
5	3,6345880	30	13,022632
6	4,2222224	32	13,605092
7	4,7570508	34	14,177131
8	5,2537182	36	14,739697
9	5,7212387	38	15,293602
10	6,1655995	40	15,839544

Nomb.	li. +	Nomb.	li. +
45	17,173366	260	61,233401
50	18,468696	280	64,806034
55	19,731245	300	68,333612
60	20,965412	320	71,820157
65	22,174669	360	78,683375
70	23,361813	400	85,417888
75	24,529138	440	92,040677
80	25,678554	480	98,565102
90	27,929887	520	105,00191
100	30,126139	560	111,35993
110	32,275096	600	117,64651
120	34,382807	640	123,86784
130	36,454085	720	136,13526
140	38,492841	800	148,19668
150	40,502303	880	160,07861
160	42,485178	960	171,80200
180	46,380020	1040	183,38376
200	50,192168	1120	194,83783
220	53,932872	1200	206,17582
240	57,610933	1280	217,40761

F I N.


C
A
B
D

E R R A T A.

Page 2, ligne 26, au lieu de $\sqrt{(1-x)^2}$; *lisez* $\sqrt{(1-x^2)}$.

— 6, — 1, au lieu de ces; *lisez* ses.

— 7, — dernière, au lieu de le; *lisez* les.

— 8, — 13, au lieu de logarithme; *lisez* logarithmes.

— 10, — 27, au lieu de $[l.\ (1+x]^2$; *lisez* $[l.\ (1+x)]^2$.

— 12, — 4, au lieu de $x = n,$; *lisez* $x = n;$.

— 15, — 20, au lieu de $a^{(i)}$; *lisez* $a^{(1)}$.

— 17, — 15, au lieu de ordonné; *lisez* ordonnée.

— 21, — 14, au lieu de $= C$; *lisez* $+ C$.

— 23, — 4, au lieu de désignat; *lisez* désignant.

— 25, — 11, au lieu de $\mathcal{A}$; *lisez* A.

— 26, — 23, au lieu de partie de table; *lisez* partie de la table.

— 27, — 3, au lieu de li. $(a+x)$ — li. $a + 100\,x\,.\,\Delta' =$; *lisez* li. $(a+x) =$ li. $a + 100\,x\,.\,\Delta' -$.

— 17, par faute d'impression, les différences partielles sont indiquées par $\{\ \}$, au lieu de $(\ )$.

